12/10/2015

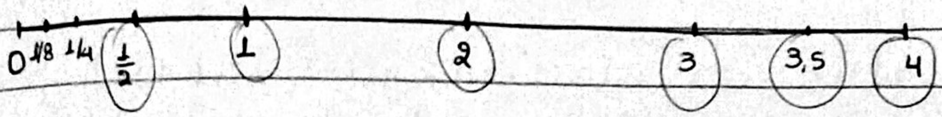
Παράδειγμα: Να βρεθούν οι αριθμοί μηχανής της $M = M(2, 3, -2, 2)$

Θα βρούμε μόνο τους θετικούς. Μικρότερος: $.100 \cdot 2^{-2} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

Μεγαλύτερος: $.111 \cdot 2^{2} = (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3})\, 2^{2} = 3{,}5$

• Για $e = -2$: $.100 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{2}$, $.101 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$, $.110 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$,

$.111 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$



• Για $e = -1$: $.100 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{4}$, $.101 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$, $.110 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$,

$.111 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1^{?}}{4} = \frac{7}{16}$

• Για $e = 0$: $.100 \cdot 2^{0} = \frac{1}{2}$, $.101 \cdot 2^{0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, $.110 \cdot 2^{0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $.111 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

• Για $e = 1$: $.100 \cdot 2 = 1$, $.101 \cdot 2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $.110 \cdot 2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $.111 \cdot 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

Για $e = 2$: $.100 \cdot 2^{2} = 2$, $.101 \cdot 2^{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $.110 \cdot 2^{2} = 2 + 1 = 3$, $.111 \cdot 2^{2} = \frac{7}{2}$

Συμβολίζουμε $fl(x)$ την προσέγγιση της ποσότητας x σε αριθμό μηχανής.

Εκτίμηση σχετικού σφάλματος: $M(b, t, L, U)$

$|\varepsilon| = \frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \frac{1}{2} b^{1-t}$. Αν x είναι μηχανής τότε ισχύει. Έστω x δεν είναι αρ. μηχανής. Τότε υπάρχουν 2 διαδοχικοί αριθμοί μηχανής x', x'' με $x' < x < x''$

$|fl(x) - x| \leq \frac{1}{2}(x'' - x)$. Έστω $x = q \cdot b^{k}$, όπου $q = .d_1 d_2 \ldots d_t d_{t+1} \ldots$, $d_1 \neq 0$, $L \leq k \leq U$

$x' = .d_1 d_2 \ldots d_t \cdot b^{k}$, $x'' = (d_1 d_2 \ldots d_t + b^{-t})\, b^{k} \Rightarrow x'' - x = b^{k-t} \Rightarrow$

$\Rightarrow |fl(x) - x| \leq \frac{1}{2} b^{k-t}$

$|x| = (.d_1 d_2 \ldots) \beta^k$ (αφού δεν είναι αριθμός μηχανής)

$|x| = (.d_1 d_2 \ldots)\beta^k \geq 1 \cdot \beta^k = \beta^{k-1}$

$$|\varepsilon| = \frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \frac{\frac{1}{2}\cdot \beta^{k-t}}{\beta^{k-1}} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

Έστω $*$ μια πράξη $* \in \{+,-,\cdot,:\}$ Για τον υπολογισμό της $x*y$ υπολογίζουμε την ποσότητα $z = fl\big(fl(x) * fl(y)\big)$

$\varepsilon = \frac{fl(x) - x}{x} \Rightarrow fl(x) = x(1+\varepsilon)$, $z = (x(1+\varepsilon_1) * y(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3)$

$|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t} = u$

<u>Πολλαπλασιασμός</u>: $z = fl(fl(x)\cdot fl(y)) = (x(1+\varepsilon_1)\, y(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3) =$

$= xy(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = xy(1+\varepsilon)^3$, $|\varepsilon| \leq u$

Έστω $A = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \Rightarrow (1-u)^3 \leq A \leq (1+u)^3$. Από θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την $(1+w)^3 \Rightarrow \exists\, \varepsilon$ τ.ω $|\varepsilon| \leq u$ και $A = (1+\varepsilon)^3$

Το σχετικό σφάλμα για τον πολ/σμό $\frac{z - xy}{xy} = \frac{\cancel{xy}(1+\varepsilon)^3 - \cancel{xy}}{\cancel{xy}} = (1+\varepsilon)^3 - 1$

$= 1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - 1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \simeq 3\varepsilon$, $3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ είναι τάξης u^2

$$\left|\frac{z - xy}{xy}\right| \simeq 3|\varepsilon| \leq 3u,$$

<u>Διαίρεση</u> $z = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) = \frac{x}{y}\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}{(1+\varepsilon_2)}$ Θέτω $\frac{1}{1+\varepsilon_2} = 1 + d$, όπου

$d = -\frac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$, $|d| = \frac{|\varepsilon_2|}{|1+\varepsilon_2|} \leq \frac{u}{1-u} = u +$ έκφραση τάξης u^2

$$z = \frac{x(1+\varepsilon_1)(1+d)(1+\varepsilon_3)}{y} = \frac{x(1+\varepsilon)^2(1+d)}{y} = \frac{x(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)(1+d)}{y} = \frac{x(1+2\varepsilon+\varepsilon^2+d+2d\varepsilon+d\varepsilon^2)}{y}$$

$$\left|\frac{z - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = \frac{\left|\frac{x}{\cancel{y}}(1+2\varepsilon+d+2d\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^2 d) - \frac{x}{\cancel{y}}\right|}{\frac{x}{\cancel{y}}} = |2\varepsilon + d + 2d\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 d| \leq$$

$\leq 2|\varepsilon| + |\delta| + 2|\delta||\varepsilon| + |\varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2|\delta| \leq 3u + \alpha$, ο α είναι της τάξης u^2

$\simeq 3u$